4^{η} δεκάδα θεμάτων επανάληψης

31.

Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ πλευράς α . Στις πλευρές ΑΒ, ΒΓ , ΓΑ παίρνουμε σημεία Δ , Ε , Ζ αντίστοιχα τέτοια ώστε $ΑΔ = ΒΕ = ΓΖ = \frac{1}{3}α$

Να υπολογίσετε συναρτήσει του α το εμβαδόν

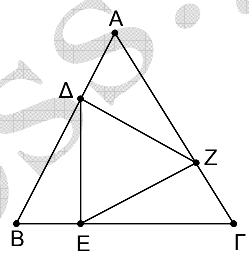
i) Του τριγώνου ΑΔΖ

ii) Του τριγώνου ΔΕΖ

iii) Του περιγεγραμμένου κύκλου στο τρίγωνο ΑΒΓ

Προτεινόμενη λύση

i)



$$(ΑΔΖ) = \frac{1}{2}\cdot ΑΔ \cdot ΑΖ \cdot ημ\widehat{Α} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}α\cdot\frac{2}{3}α\cdot ημ60^{o}$$

$$= \frac{1}{9}α^2\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}α^2}{18} \text{ τετραγωνικές μονάδες}$$

ii)

Τα τρίγωνα ΑΔΖ , ΒΔΕ , ΓΕΖ είναι προφανώς ίσα (Π – Γ – Π)

οπότε ΔΖ = ΖΕ = ΔΕ δηλαδή το ΔΕΖ είναι ισόπλευρο .

Από τον νόμο των συνημιτόνων στο τρίγωνο ΑΔΖ έχουμε

$$ΔΖ^2 = ΑΔ^2 + ΑΖ^2 - 2ΑΔ\cdot ΑΖ\, συν\widehat{Α} =$$

$$= \frac{1}{9}α^2 + \frac{4}{9}α^2 - 2\cdot\frac{1}{3}α\cdot\frac{2}{3}α\cdot συν60^{o} = \frac{3}{9}α^2 \text{ άρα } ΔΖ = \frac{α\sqrt{3}}{3}$$

Το εμβαδόν του τριγώνου ΔΕΖ είναι

$$(ΔΕΖ) = \frac{(ΔΖ)^2\sqrt{3}}{4} = \frac{α^2\sqrt{3}}{12} \text{ τετραγωνικές μονάδες}$$

iii)

Αν R είναι η ακτίνα του περιγεγραμμένου κύκλου στο τρίγωνο ΑΒΓ τότε

$$α = R\sqrt{3} \Leftrightarrow R = \frac{α}{\sqrt{3}} \text{ οπότε το εμβαδόν του θα είναι}$$

$$Ε = π\, R^2 = \frac{πα^2}{3} \text{ τετραγωνικές μονάδες}$$

32.

Θεωρούμε τρεις διαδοχικές γωνίες $x\widehat{O}y$, $y\widehat{O}z$, $z\widehat{O}x$ έτσι ώστε

$x\widehat{O}y = y\widehat{O}z = 150^o$. Στις ημιευθείες Ox, Oy, Oz παίρνουμε σημεία Α, Β, Γ αντίστοιχα έτσι ώστε ΟΑ = 2, ΟΒ = 4, ΟΓ = 6

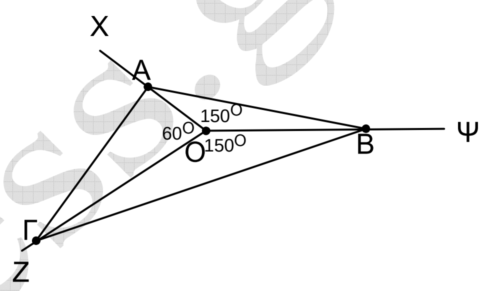
i) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου ΟΑΓ

ii) Να υπολογίσετε τον λόγο των εμβαδών $\dfrac{(AOB)}{(AB\Gamma)}$

iii) Να υπολογίσετε τις ακτίνες του εγγεγραμμένου και περιγεγραμμένου κύκλων του τριγώνου ΟΑΓ

Προτεινόμενη λύση

i)



$$(AO\Gamma) = \frac{1}{2}OA\cdot O\Gamma\eta\mu 60^o = \frac{1}{2}\cdot 2\cdot 6\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3} \text{ τ. μ}$$

ii)

$$(AOB) = \frac{1}{2}OA\cdot OB\eta\mu 150^o = \frac{1}{2}\cdot 2\cdot 4\cdot\frac{1}{2} = 2 \text{ τ. μ}$$

$$(BO\Gamma) = \frac{1}{2}O\Gamma\cdot OB\eta\mu 150^o = \frac{1}{2}\cdot 6\cdot 4\cdot\frac{1}{2} = 6 \text{ τ. μ}$$

Συνεπώς

$$(AB\Gamma) = (AO\Gamma) + (AOB) + (BO\Gamma) = 8 + 3\sqrt{3} \text{ τ .μ}$$

Οπότε

$$\frac{(AOB)}{(AB\Gamma)} = \frac{2}{8+3\sqrt{3}}$$

iii)

Από τον νόμο των συνημιτόνων στο τρίγωνο ΟΑΓ έχουμε

$$A\Gamma^2 = OA^2 + O\Gamma^2 - 2OAO\Gamma\sigma\upsilon\nu 60^o =$$

$$= 4 + 36 - 24\cdot\frac{1}{2} = 28 \text{ οπότε } A\Gamma = 2\sqrt{7}$$

Αν R είναι η ακτίνα του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου ΟΑΓ

από τον τύπο $(AO\Gamma) = \dfrac{OA\cdot O\Gamma\cdot A\Gamma}{4R}$ έχουμε

$$3\sqrt{3} = \frac{2\cdot 6\cdot 2\sqrt{7}}{4R} \Leftrightarrow R = 2\sqrt{\frac{7}{3}}$$

Ακόμα, η ημιπερίμετρος του τριγώνου ΟΑΓ είναι

$\tau = \dfrac{OA + O\Gamma + A\Gamma}{2} = \dfrac{8+2\sqrt{7}}{2} = 4 + \sqrt{7}$

αν ρ είναι η ακτίνα του εγγεγραμμένου κύκλου στο τρίγωνο ΟΑΓ τότε

$(AO\Gamma) = \tau \cdot \rho \Leftrightarrow 3\sqrt{3} = (4 + \sqrt{7})\rho \Leftrightarrow$

$\rho = \dfrac{3\sqrt{3}}{4+\sqrt{7}}$

33.

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $\alpha = 2\gamma$ και $\mu_\alpha = \dfrac{\alpha\sqrt{3}}{2}$

i) Δείξτε ότι $\beta = \gamma\sqrt{7}$

ii) Να καθορίσετε το είδος του τριγώνου ως προς τις γωνίες του

iii) Αν ΑΔ είναι η προβολή της πλευράς ΑΒ στην ΑΓ να βρείτε το μήκος της ΑΔ

iv) Αν Μ μέσο της ΑΓ να υπολογίσετε τον λόγο των εμβαδών $\dfrac{(\text{ΒΜΔ})}{(\text{ΑΒΓ})}$

Προτεινόμενη λύση

i)

Από το πρώτο θεώρημα διαμέσων έχουμε

$$\beta^2 + \gamma^2 = 2\mu_\alpha^2 + \frac{\alpha^2}{2} \Leftrightarrow \beta^2 + \gamma^2 = \frac{3\alpha^2}{2} + 2\gamma^2 \Leftrightarrow$$

$$\beta^2 + \gamma^2 = 6\gamma^2 + 2\gamma^2 \Leftrightarrow \beta = \gamma\sqrt{7}$$

ii)

Είναι φανερό ότι $\gamma\sqrt{7} > 2\gamma > \gamma \Leftrightarrow \beta > \alpha > \gamma$ και

$\beta^2 = 7\gamma^2$, $\alpha^2 + \gamma^2 = 5\gamma^2$ άρα $\beta^2 > \alpha^2 + \gamma^2 \Leftrightarrow \hat{B} > 90^o$ το τρίγωνο είναι αμβλυγώνιο

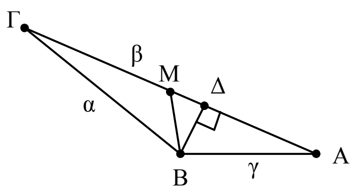
iii)

Γενίκευση πυθαγορείου για την πλευρά α

$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\text{ΑΔ} \Leftrightarrow$

$4\gamma^2 = 7\gamma^2 + \gamma^2 - 2\gamma\sqrt{7}\,\text{ΑΔ} \Leftrightarrow$

$\text{ΑΔ} = \dfrac{2\gamma\sqrt{7}}{7}$



iv)

$$\frac{(\text{ΒΜΔ})}{(\text{ΑΒΓ})} = \frac{\text{ΜΔ}}{\text{ΑΓ}} \quad .$$

Όμως $\text{ΜΔ} = \text{ΑΜ} - \text{ΑΔ} =$

$$= \frac{\beta}{2} - \frac{2\gamma\sqrt{7}}{7} = \frac{\gamma\sqrt{7}}{2} - \frac{2\gamma\sqrt{7}}{7} = \frac{3\gamma\sqrt{7}}{14} \text{ άρα}$$

$$\frac{(\text{ΒΜΔ})}{(\text{ΑΒΓ})} = \frac{\frac{3\gamma\sqrt{7}}{14}}{\gamma\sqrt{7}} = \frac{3}{14}$$

34.

Σε κύκλο (Ο , R) είναι εγγεγραμμένο ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ πλευράς ΑΒ = 15

Να υπολογίσετε

i) Την ακτίνα R του κύκλου

i) Το εμβαδόν του κύκλου

i) Το εμβαδόν του ισοπλεύρου τριγώνου

iv) Το εμβαδόν της περιοχής που περικλείεται από τον κύκλο και το ισόπλευρο τρίγωνο

v) Το εμβαδόν του κανονικού εξαγώνου του εγγεγραμμένου στον ίδιο κύκλο

Προτεινόμενη λύση

i)

Γνωρίζουμε ότι ΑΒ = $R\sqrt{3}$ άρα

$15 = R\sqrt{3} \Leftrightarrow R = \dfrac{15}{\sqrt{3}} = 5\sqrt{3}$

ii)

$E_{\text{κύκλου}} = \pi R^2 = \pi(5\sqrt{3})^2 = 75\pi$ τετραγωνικές μονάδες

iii)

$(ΑΒΓ) = \dfrac{AB^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{225\sqrt{3}}{4}$ τετραγωνικές μονάδες

iv)

$E_{\text{ζητούμενο}} = E_{(O\,,\,R)} - E_{\triangle ΑΒΓ} = 75\pi - \dfrac{225\sqrt{3}}{4}$ τετραγωνικές μονάδες

v)

Το απόστημα α_6 δίνεται από τον τύπο $\alpha_6 = \dfrac{R\sqrt{3}}{2}$

και επειδή $R = 5\sqrt{3}$ είναι $\alpha_6 = \dfrac{15}{2}$ επίσης $\lambda_6 = R = 5\sqrt{3}$ άρα

$E_6 = 6\cdot\dfrac{1}{2}\alpha_6\cdot\lambda_6 = 3\cdot\dfrac{15}{2}\cdot 5\sqrt{3} = \dfrac{225\sqrt{3}}{2}$ τετραγωνικές μονάδες

35.

Σε τρίγωνο ΑΒΓ ,Θ είναι το βαρύκεντρο και $B\widehat{\Theta}\Gamma = 60^o$ Δείξτε ότι

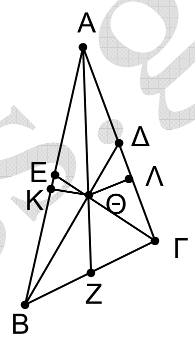
i) $\mu_\beta \cdot \mu_\gamma = \dfrac{\beta^2 + \gamma^2 - 5\alpha^2}{4}$

ii) $(\mathrm{B\Theta\Gamma}) = \dfrac{1}{3}(\mathrm{AB\Gamma})$

iii) Αν ΘΚ , ΘΛ είναι οι αποστάσεις του Θ από τις πλευρές ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα δείξτε ότι ΘΚ· ΑΒ = ΘΛ· ΑΓ

Προτεινόμενη λύση

i)



Από τον νόμο των συνημιτόνων στο τρίγωνο ΒΘΓ έχουμε

$$\mathrm{B\Gamma}^2 = \mathrm{B\Theta}^2 + \Gamma\Theta^2 - 2\mathrm{B\Theta}\Gamma\Theta\,\text{συν}\, B\widehat{\Theta}\Gamma =$$

$$= \frac{4}{9}\mu_\beta^2 + \frac{4}{9}\mu_\gamma^2 - 2\cdot\frac{2}{3}\mu_\beta\cdot\frac{2}{3}\mu_\gamma\,\text{συν}60^o =$$

$$= \frac{4}{9}\mu_\beta^2 + \frac{4}{9}\mu_\gamma^2 - 2\cdot\frac{2}{3}\mu_\beta\cdot\frac{2}{3}\mu_\gamma\cdot\frac{1}{2} =$$

$$= \frac{4}{9}\mu_\beta^2 + \frac{4}{9}\mu_\gamma^2 - \frac{4}{9}\mu_\beta\cdot\mu_\gamma \quad \text{άρα}$$

$$\alpha^2 = \frac{4}{9}\mu_\beta^2 + \frac{4}{9}\mu_\gamma^2 - \frac{4}{9}\mu_\beta\cdot\mu_\gamma \Leftrightarrow$$

$$\frac{4}{9}\mu_\beta\cdot\mu_\gamma = \frac{4}{9}\cdot\frac{2\alpha^2 + 2\gamma^2 - \beta^2}{4} + \frac{4}{9}\cdot\frac{2\beta^2 + 2\alpha^2 - \gamma^2}{4} - \alpha^2 \Leftrightarrow$$

$$\mu_\beta\cdot\mu_\gamma = \frac{\beta^2 + \gamma^2 - 5\alpha^2}{4}$$

ii)

Επειδή η ΑΖ είναι διάμεσος στα τρίγωνα ΑΒΓ και ΒΘΓ έχουμε

(ΑΒΖ) = (ΑΓΖ) και (ΒΘΖ) = (ΓΘΖ) αφαιρώντας κατά μέλη βρίσκουμε

(ΑΒΖ) – (ΒΘΖ) = (ΑΓΖ) – (ΓΘΖ) ⇔

(ΑΒΘ) = (ΑΘΓ) ομοίως αποδεικνύεται ότι (ΑΒΘ) = (ΒΘΓ) άρα

(ΑΒΘ) = (ΑΘΓ) = (ΒΘΓ) οπότε $(\mathrm{B\Theta\Gamma}) = \dfrac{1}{3}(\mathrm{AB\Gamma})$

iii)

$$(\mathrm{AB\Theta}) = (\mathrm{A\Theta\Gamma}) \Leftrightarrow \frac{1}{2}\mathrm{AB}\cdot\Theta\mathrm{K} = \frac{1}{2}\mathrm{A\Gamma}\cdot\Theta\Lambda \Leftrightarrow \mathrm{AB}\cdot\Theta\mathrm{K} = \mathrm{A\Gamma}\cdot\Theta\Lambda$$

36.

Σε κύκλο (O, R) θεωρούμε τα διαδοχικά σημεία A , B , Γ ώστε AB = λ_6 και ΒΓ= λ_3
Αν Μ το μέσο της ΒΓ και Δ το σημείο στο οποίο η ΑΜ τέμνει τον κύκλο

i) Να βρείτε την περίμετρο του τριγώνου ΑΒΓ συναρτήσει του R

ii). Να υπολογίσετε συναρτήσει του R το τμήμα ΜΔ.

iii) Να υπολογιστεί ο λόγος των εμβαδών του τριγώνου ΑΒΓ και του κύκλου (O, R)

iv) Να υπολογίσετε το εμβαδό συναρτήσει του R κάθε κυκλικού τμήματος που ορίζεται από τις πλευρές του τριγώνου ΑΒΓ και περιέχεται στην αντίστοιχη κυρτή γωνία του τριγώνου .

Προτεινόμενη λύση

i)

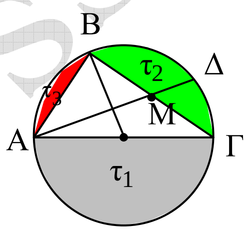
Επειδή AB = λ_6 και ΒΓ= λ_3 θα είναι $\widehat{AB} = 60^o$ και $\widehat{B\Gamma} = 120^o$

άρα $\widehat{AB\Gamma} = 180^o$ επομένως η ΑΓ είναι διάμετρος του κύκλου δηλαδή ΑΓ = 2R

ακόμα είναι AB = λ_6 = R , ΒΓ = λ_3 = $R\sqrt{3}$

Η περίμετρος P του τριγώνου ΑΒΓ είναι

$P = AB + A\Gamma + B\Gamma = R + 2R + R\sqrt{3} = 3R + R\sqrt{3}$



ii)

Η ΑΜ είναι διάμεσος στο τρίγωνο ΑΒΓ οπότε

$$AM^2 = \frac{2AB^2 + 2A\Gamma^2 - B\Gamma^2}{4} =$$

$$= \frac{2R^2 + 2\cdot 4R^2 - 3R^2}{4} = \frac{7R^2}{4} \text{ άρα } AM = \frac{R\sqrt{7}}{2}$$

Από το θεώρημα των τεμνόμενων χορδών έχουμε

$$AM \cdot M\Delta = BM \cdot M\Gamma \quad \Leftrightarrow$$

$$\frac{R\sqrt{7}}{2} \cdot M\Delta = \frac{R\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{R\sqrt{3}}{2} \quad \Leftrightarrow \quad M\Delta = \frac{3R\sqrt{7}}{14}$$

iii)

Το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ είναι ίσο με

$$(AB\Gamma) = \frac{1}{2} AB \cdot B\Gamma = \frac{1}{2} R \cdot R\sqrt{3} = \frac{R^2\sqrt{3}}{2}$$

Και το εμβαδόν του κύκλου $E_{\text{κύκλου}} = \pi R^2$

Οπότε $\dfrac{E_{AB\Gamma}}{E_{(O,\,R)}} = \dfrac{\dfrac{R^2\sqrt{3}}{2}}{\pi R^2} = \dfrac{\sqrt{3}}{2\pi}$

iv)

Το κυκλικό τμήμα **τ₁** (γκρίζα περιοχή) είναι ημικύκλιο με εμβαδόν

$E_1 = \dfrac{\pi R^2}{2}$

Το κυκλικό τμήμα **τ₃** (κόκκινη περιοχή) έχει εμβαδόν E_3 ίσο με

$E_3 = E_{(O\widehat{AB})} - E_{\triangle ABO} =$

$= \dfrac{\pi R^2 60^o}{360^o} - \dfrac{1}{2}R^2 \eta\mu 60^o = \dfrac{\pi R^2}{6} - \dfrac{R^2\sqrt{3}}{4}$

Και το κυκλικό τμήμα **τ₂** (πράσινη περιοχή) έχει εμβαδόν E_2 ίσο με

$E_2 = E_{(O\widehat{B\Gamma})} - E_{\triangle B\Gamma O} =$

$= \dfrac{\pi R^2 120^o}{360^o} - \dfrac{1}{2}R^2 \eta\mu 120^o = \dfrac{\pi R^2}{3} - \dfrac{R^2\sqrt{3}}{4}$

37.

Δίνεται κύκλος (O, R) και δύο ίσοι κύκλοι στο εσωτερικό του, $(O_1, \frac{1}{3}R)$ και $(O_2, \frac{1}{3}R)$ εφαπτόμενοι μεταξύ τους στο A και εφαπτόμενοι του (O, R) στα B και Γ αντίστοιχα.

i) Δείξτε ότι το τρίγωνο OO_1O_2 είναι ισόπλευρο

ii) Να βρείτε την περίμετρο και το εμβαδόν του καμπυλογράμμου τριγώνου ΑΒΓ

Προτεινόμενη λύση

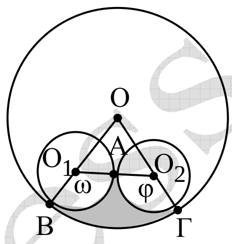
i)

Είναι $OO_1 = \frac{2}{3}R$, $OO_2 = \frac{2}{3}R$ και

$O_1O_2 = O_1A + O_2A = \frac{1}{3}R + \frac{1}{3}R = \frac{2}{3}R$

άρα $OO_1 = OO_2 = O_1O_2$

δηλαδή το τρίγωνο OO_1O_2 είναι ισόπλευρο



ii)

Προφανώς $\hat{O} = 60^o$, $\hat{\omega} = 120^o = \hat{\varphi}$ με

$$\ell_{\overset{\frown}{B\Gamma}} = \frac{\pi R 60^o}{180^o} = \frac{\pi R}{3} \text{ και } \ell_{\overset{\frown}{AB}} = \ell_{\overset{\frown}{A\Gamma}} = \frac{\pi \frac{1}{3} R 120^o}{180^o} = \frac{2\pi R}{9}$$

συνεπώς η περίμετρος του καμπυλόγραμμου τριγώνου (γκρίζα περιοχή) είναι ίση με

$$P = \frac{\pi R}{3} + 2\frac{2\pi R}{9} = \frac{7\pi R}{9}$$

Το εμβαδόν του καμπυλόγραμμου τριγώνου προκύπτει αν από το εμβαδόν του κυκλικού τομέα $O\overset{\frown}{B\Gamma}$ αφαιρέσουμε το εμβαδόν του ισόπλευρου τριγώνου OO_1O_2 και το εμβαδόν των δύο ίσων κυκλικών τομέων $O_1\overset{\frown}{AB}$ και $O_2\overset{\frown}{A\Gamma}$ όμως

$$(O\overset{\frown}{B\Gamma}) = \frac{\pi R^2 60^o}{360^o} = \frac{\pi R^2}{6} \text{ , } (OO_1O_2) = \frac{\frac{4}{9}R^2\sqrt{3}}{4} = \frac{R^2\sqrt{3}}{9} \text{ και}$$

$$(O_1\overset{\frown}{AB}) = \frac{\pi \frac{1}{9} R^2 120^o}{360^o} = \frac{\pi R^2}{27} \text{ άρα}$$

$$E_{\text{ζητούμενο}} = \frac{\pi R^2}{6} - \frac{R^2\sqrt{3}}{9} - \frac{2\pi R^2}{27} \text{ τετραγωνικές μονάδες}$$

38.

Έστω τρίγωνο ΑΒΓ με $\beta = \alpha\sqrt{3}$ και διάμεσο $\mu_\alpha = \dfrac{3\alpha}{2}$

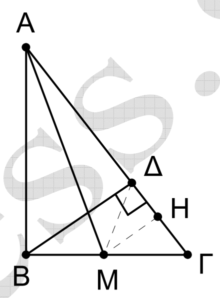
i) Δείξτε ότι $\gamma = \sqrt{2}$ και $\hat{B} = 90^o$

ii) Αν ΒΔ ύψος τότε $A\Delta = \dfrac{2\beta}{3}$

iii) Να βρείτε τον λόγο των εμβαδών $\dfrac{(A\Delta M)}{(AB\Gamma)}$

Προτεινόμενη λύση

i)



$\mu_\alpha^2 = \dfrac{2\beta^2 + 2\gamma^2 - \alpha^2}{4}$ και λόγω της υπόθεσης

$$\frac{9\alpha^2}{4} = \frac{6\alpha^2 + 2\gamma^2 - \alpha^2}{4} \Leftrightarrow \gamma = \alpha\sqrt{2}$$

Επίσης

$\beta^2 = 3\alpha^2$ και $\alpha^2 + \gamma^2 = \alpha^2 + 2\alpha^2 = 3\alpha^2$ άρα

$\beta^2 = \alpha^2 + \gamma^2$ οπότε $\hat{B} = 90^o$

ii)

Από γνωστό θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ έχουμε

$AB^2 = A\Gamma \cdot A\Delta \Leftrightarrow$

$2\alpha^2 = \alpha\sqrt{3}\,A\Delta \Leftrightarrow A\Delta = \dfrac{2\alpha\sqrt{3}}{3} = \dfrac{2\beta}{3}$

iii)

Αν ΜΗ ύψος του τριγώνου ΑΜΔ τότε

$\dfrac{(A\Delta M)}{(AB\Gamma)} = \dfrac{\frac{1}{2}A\Delta \cdot MH}{\frac{1}{2}A\Gamma \cdot B\Delta}$ και επειδή Μ μέσο της ΒΓ και ΜΗ// ΒΔ (κάθετα στην ΑΓ)

είναι $MH = \dfrac{B\Delta}{2}$ οπότε $\dfrac{(A\Delta M)}{(AB\Gamma)} = \dfrac{\frac{2\beta}{3}\cdot\frac{B\Delta}{2}}{\beta \cdot B\Delta} = \dfrac{1}{3}$

39.

Σε κύκλο (O , R) θεωρούμε μία διάμετρο ΒΓ και χορδή ΒΑ = λ_6 επίσης ΑΔ $\perp$ ΒΓ και Μ το μέσο του τόξου $\overset{\frown}{A\Gamma}$. Αν η ΒΜ τέμνει τα ΑΔ και ΑΓ στα σημεία Ε και Ζ αντίστοιχα .

i) Να βρείτε την περίμετρο του τριγώνου ΑΒΜ συναρτήσει του R

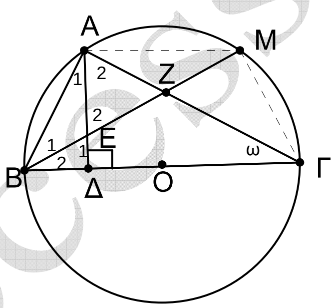
ii) Δείξτε ότι ΒΕ = $\dfrac{R\sqrt{3}}{3}$

iii) Δείξτε ότι το τρίγωνο ΑΕΖ είναι ισόπλευρο του οποίου να βρείτε το εμβαδόν συναρτήσει του R

iv) Δείξτε ότι (ΑΒΕ) = 2(ΒΕΔ)

Προτεινόμενη λύση

i)



Φέρω τα τμήματα ΑΜ και ΜΓ

ΑΒ = λ_6 άρα ΑΒ = R και $\overset{\frown}{AB} = 60^o$

οπότε $\overset{\frown}{A\Gamma} = 120^o$ και επομένως

$\overset{\frown}{AM} = 60^o$ και $\overset{\frown}{BM} = 120^o$ άρα

ΑΜ = λ_6 = R και ΒΜ = λ_3 = $R\sqrt{3}$

Η περίμετρος Π του τριγώνου ΑΒΜ είναι ίση με

$\Pi = AB + AM + BM = R + R + R\sqrt{3} = 2R + R\sqrt{3}$

ii)

Επειδή οι γωνίες $B\widehat{M}\Gamma$ και $B\widehat{A}\Gamma$ είναι εγγεγραμμένες σε ημικύκλιο θα είναι

$B\widehat{M}\Gamma = B\widehat{A}\Gamma = 90^o$

στο τετράπλευρο ΕΔΓΜ έχουμε $\widehat{M} + \widehat{\Delta} = 180^o$ επομένως αυτό είναι εγγράψιμο άρα

ΒΕ· ΒΜ = ΒΔ ·ΒΓ **(1)**

Όμως ΒΜ = $R\sqrt{3}$ και από το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ είναι

$B\Delta \cdot B\Gamma = AB^2 = R^2$ Οπότε η **(1)** γίνεται

$BE \cdot R\sqrt{3} = R^2 \Leftrightarrow BE = \dfrac{R\sqrt{3}}{3}$

iii)

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ είναι ΑΒ = R = $\dfrac{B\Gamma}{2}$ άρα $\widehat{\omega} = 30^o$

εύκολα βρίσκουμε ότι $\widehat{B}_1 = \widehat{B}_2 = 30^o$ άρα $\widehat{A}_1 = 30^o$ και $\widehat{E}_1 = 60^o$ μετά από αυτά είναι

$\widehat{A}_2 = 60^o$ και $\widehat{E}_2 = 60^o$ συνεπώς το τρίγωνο ΑΕΖ είναι ισόπλευρο και το ΑΕΒ ισοσκελές

Επειδή $AE = EB = \dfrac{R\sqrt{3}}{3}$ το εμβαδόν του ΑΕΖ είναι ίσο με

$$(AEZ) = \frac{\frac{3R^2}{9}\sqrt{3}}{4} = \frac{R^2\sqrt{3}}{12}$$ τετραγωνικές μονάδες

iv)

Τα τρίγωνα ΑΒΕ και ΕΒΔ έχουν $\widehat{B}_1 = \widehat{B}_2 = 30^o$ άρα

$\dfrac{(ABE)}{(BE\Delta)} = \dfrac{AB \cdot BE}{B\Delta \cdot BE} = \dfrac{AB}{B\Delta}$ και επειδή $\widehat{A}_1 = 30^o$ είναι $B\Delta = \dfrac{B\Delta}{2}$ άρα

$$\frac{(ABE)}{(BE\Delta)} = \frac{\frac{B\Delta}{2}}{B\Delta} = 2 \Leftrightarrow (ABE) = 2(BE\Delta)$$

40.

Οι πλευρές οξυγωνίου τριγώνου ΑΒΓ ικανοποιούν την σχέση $2\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2$, αν ΒΕ, ΓΖ, ΑΔ ύψη του τριγώνου και Η το ορθόκεντρο , δείξτε ότι

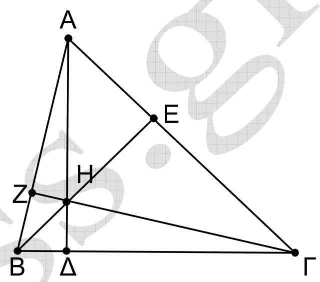
i) $\alpha^2 = \beta\cdot AE + \gamma\cdot AZ$

ii) $BH^2 + \Gamma H^2 = 2AH^2$

iii) $\dfrac{H\Delta}{A\Delta} + \dfrac{HE}{BE} + \dfrac{ZH}{\Gamma Z} = 1$ και $\dfrac{AH}{A\Delta} + \dfrac{BH}{BE} + \dfrac{\Gamma H}{\Gamma Z} = 2$

Προτεινόμενη λύση

i)



Γενίκευση πυθαγορείου στο ΑΒΓ

$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta AE$

$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\gamma AZ$ προσθέτοντας κατά μέλη έχουμε

$2\alpha^2 = 2\beta^2 + 2\gamma^2 - 2\beta AE - 2\gamma AZ$ και λόγω της υπόθεσης

$\beta^2 + \gamma^2 = 2\beta^2 + 2\gamma^2 - 2\beta AE - 2\gamma AZ \Leftrightarrow$

$$\beta\cdot AE + \gamma\cdot AZ = \frac{\beta^2 + \gamma^2}{2} = \alpha^2$$

ii)

Γενίκευση πυθαγορείου στα ΑΒΗ και ΑΗΓ

$BH^2 = \gamma^2 + AH^2 - 2\gamma AZ$

$\Gamma H^2 = AH^2 + \beta^2 - 2\beta AE$ προσθέτοντας κατά μέλη έχουμε

$BH^2 + \Gamma H^2 = 2AH^2 + \gamma^2 + \beta^2 - 2\gamma AZ - 2\beta AE \quad \Leftrightarrow$

$BH^2 + \Gamma H^2 = 2AH^2 + \gamma^2 + \beta^2 - 2(\gamma\, AZ + \beta\, AE) \quad \Leftrightarrow$

$BH^2 + \Gamma H^2 = 2AH^2 + 2\alpha^2 - 2\alpha^2 \Leftrightarrow BH^2 + \Gamma H^2 = 2AH^2$

iii)

$$1 = \frac{(AB\Gamma)}{(AB\Gamma)} = \frac{(ABH)}{(AB\Gamma)} + \frac{(A\Gamma H)}{(AB\Gamma)} + \frac{(B\Gamma H)}{(AB\Gamma)} = \frac{ZH}{\Gamma Z} + \frac{HE}{BE} + \frac{H\Delta}{A\Delta} \text{ τώρα}$$

$$\frac{ZH}{\Gamma Z} + \frac{HE}{BE} + \frac{H\Delta}{A\Delta} = 1 \Leftrightarrow \frac{Z\Gamma - H\Gamma}{\Gamma Z} + \frac{BE - BH}{BE} + \frac{A\Delta - AH}{A\Delta} = 1$$

$$1 - \frac{H\Gamma}{\Gamma Z} + 1 - \frac{BH}{BE} + 1 - \frac{AH}{A\Delta} = 1 \Leftrightarrow \frac{AH}{A\Delta} + \frac{BH}{BE} + \frac{\Gamma H}{\Gamma Z} = 2$$